PÊNDULO

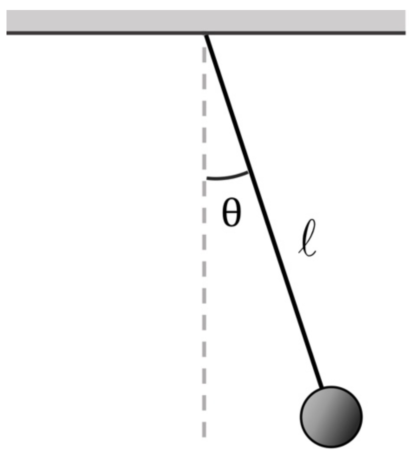
Nesta atividade iremos verificar experimentalmente a lei que descreve o período das pequenas oscilações de um pêndulo, e usá-la para determinar a aceleração da gravidade.

DISCIPLINA	PROGRAMA CURRICULAR
Física - 10°ano; Física - 12° ano	Forças e Movimentos; Forças, Movimentos e Equilíbrio

De que depende a oscilação de um pêndulo?

As oscilações de um pêndulo simples são descritas por uma equação do movimento não linear. No caso de pequenas oscilações (para ângulos menores que 20° o erro não é significativo) a equação pode ser simplificada e obtém-se como solução uma oscilação harmónica descrita por uma função sinusoidal do tipo $\theta(t) = \theta_0 sen(\omega_0 t + \delta)$ com $\omega_0 = 2\pi/T$, em que θ_0 e δ dependem das condições iniciais. O período de oscilação (T) depende apenas do comprimento do pêndulo e da aceleração da gravidade.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$



Com as experiências propostas verifica-se experimentalmente a dependência do período de oscilação com o comprimento do pêndulo e a sua independência da massa do pêndulo. Pode-se ainda determinar experimentalmente a aceleração da gravidade.

EXPERIÊNCIAS

5.1 - Verificar a dependência do período com $\sqrt{\ell}$.
5.2 - Verificar que o período não depende da massa M do pêndulo.
5.3 - Determinar da aceleração da gravidade.

PRECEDÊNCIAS
5.1 - nenhuma
5.2 - 5.1
5.3 - 5.1

MATERIAL

- Fio de algodão;
- Clips (nº10);
- Cronómetro (ou app no smartphone);
- Fita-cola;
- Caneta de acetato ou de feltro;
- Régua de 30 cm;
- Papel quadriculado e máquina de calcular (ou acesso a uma folha de cálculo para ajustes lineares).

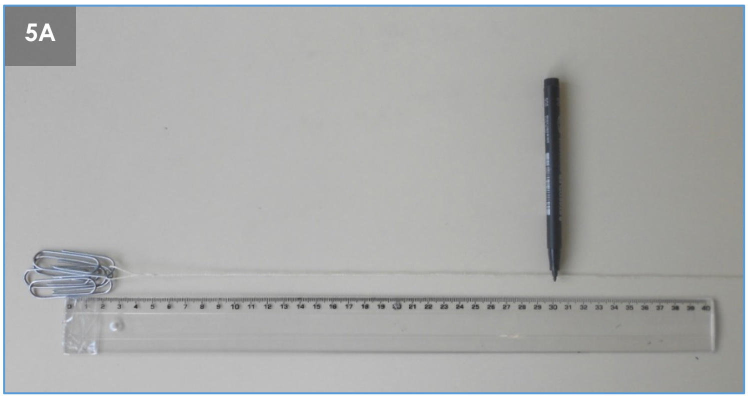
PROCEDIMENTO

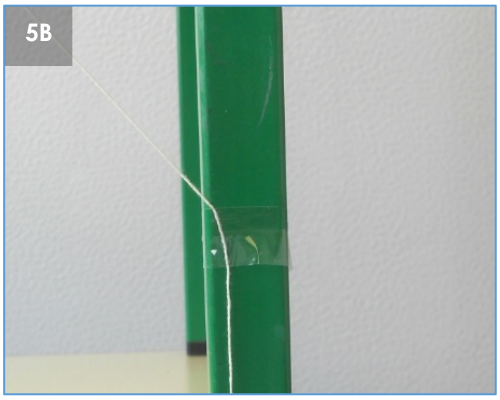
EXPERIÊNCIA 5.1 – Determinar o período de um pêndulo e ver de que forma depende do comprimento

1. Monta-se uma estrutura de trabalho com duas mesas tal como descrito no procedimento 1.1.

2. Usa-se um fio de algodão com cerca de 2,5 m de comprimento no qual se dá uma laçada numa das extremidades: engancham-se quatro clips nessa laçada; fazem-se 4 marcas no fio de 30 em 30 cm, começando ao centro dos clips. (Fig. 5A).

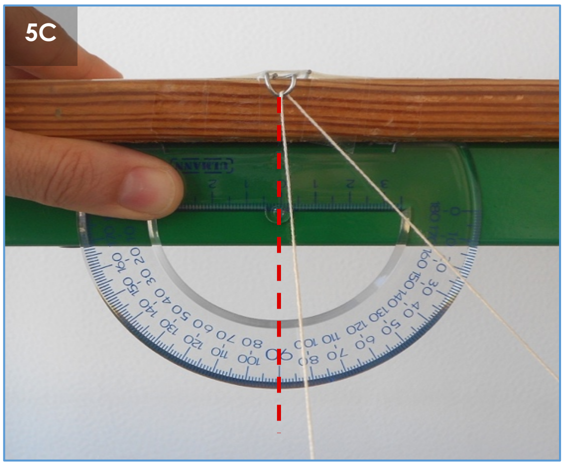
3. Constrói-se um pêndulo fazendo passar o fio de algodão pelo gancho fixado no tampo da mesa superior, ficando os clips suspensos, e fixando com fita-cola a outra extremidade do fio à perna da mesa (Fig. 5B).


5A


5B

4. Faz-se coincidir a marca no fio que corresponde a um comprimento do pêndulo de 120 cm com o centro do gancho fixo à mesa (pêndulo de comprimento $\ell = 120\ \mathrm{cm}$).

5. Coloca-se o pêndulo a oscilar (é conveniente usar um ângulo inicial de oscilação não superior a 10°) (Fig. 5C).



6. Mede-se o período de oscilação com o cronómetro. Para melhorar a qualidade da medida é conveniente contar as oscilações a partir da posição em que ele inverte o seu movimento pela primeira vez e medir o tempo de várias oscilações (cerca de 10). O período, T, calcula-se dividindo esse tempo pelo número de oscilações.

7. Repete-se o procedimento anterior para cada uma das marcas do fio (basta puxar o fio que está fixo na aduela pela fita-cola até a próxima marca coincidir com o gancho de suspensão.

***Exemplo**: consideremos um pêndulo com comprimento ℓ. Libertando-o a cerca de 10° do seu ponto de equilíbrio obteve-se um tempo de t para n oscilações. Assim o período deste pêndulo é*

$$T = \frac{t}{n}$$

Repetindo o procedimento para os diferentes comprimentos do pêndulo obtemos uma tabela com os valores de T, ℓ e $\sqrt{\ell}$ a partir da qual podemos construir um gráfico do período em função de $\sqrt{\ell}$. Verifica-se a partir deste gráfico que esta dependência é linear

$$T = m\sqrt{\ell}$$

em que m é o declive da reta que passa aproximadamente pelos pontos experimentais.

EXPERIÊNCIA 5.2 – Verificar que o período do pêndulo não depende da sua massa M

1. Repete-se o procedimento 5.1 duplicando o número de clips, alterando a sua massa M.

2. Verifica-se que se obtém outra reta com um declive semelhante à anterior.

EXPERIÊNCIA 5.3 – Determinar a aceleração da gravidade

1. Num nível mais avançado, podemos recorrer à equação do movimento do pêndulo para relacionar o período do pêndulo na aproximação de pequenas oscilações com a aceleração da gravidade. Como vimos, neste caso

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Recorrendo ao(s) declive(s), m, da(s) reta(s) previamente determinado(s) podemos calcular um valor experimental para a aceleração da gravidade do local, g,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = m\sqrt{\ell}$$

isto é,

$$g = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2$$

RESULTADOS ESPERADOS e CONCLUSÕES

EXPERIÊNCIA 5.1

Marcadas as 4 distâncias no fio, medem-se 10 períodos para cada comprimento como descrito no ponto 6. Com os resultados obtidos organiza-se uma tabela como a seguinte.

Tabela 1 – Experiência 5.1

ℓ (cm)	$\sqrt{\ell}$ ($\mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$)	$10 \times T$ (s)	T (s)	$\frac{T}{\sqrt{\ell}}$ ($\mathrm{s/m^{1/2}}$)
30,0	**0,55**	11,1	**1,11**	**2,02**
60,0	**0,77**	15,5	**1,55**	**2,01**
90,0	**0,95**	19,2	**1,92**	**2,02**
120,0	**1,10**	22,2	**2,22**	**2,02**

Podemos analisar os resultados de 3 formas diferentes:

a) Calcular $T/\sqrt{\ell}$ para todas as linhas da tabela e verificar que se obtém sempre o mesmo valor (última coluna da Tabela 1).

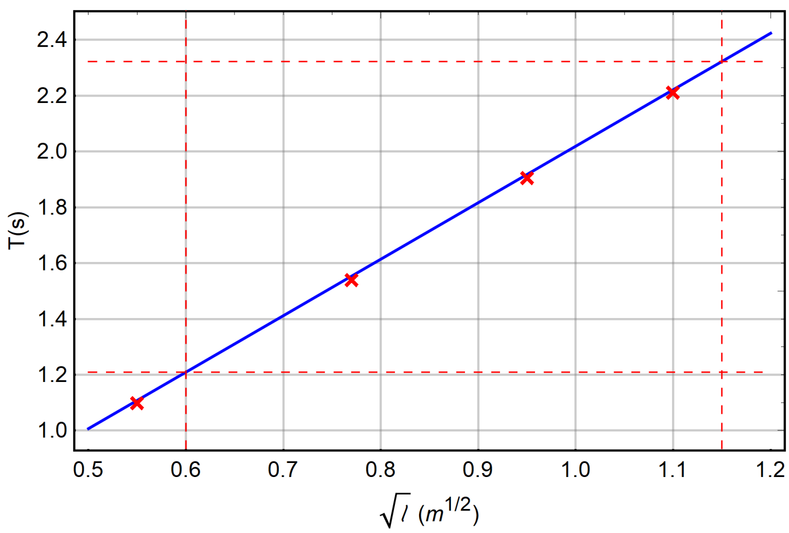
b) Representar graficamente os pontos numa folha quadriculada e efetuar um ajuste linear à mão (desenhando com uma régua a reta que melhor se ajusta ao conjunto de pontos). Escolhendo dois pontos da reta, calcula-se o declive.

Se os pontos assinalados são (0,60; 1,21) e (1,15; 2,32), como os representados no gráfico abaixo, então o declive é dado por:

$$m = \frac{2{,}32 - 1{,}21}{1{,}15 - 0{,}60} = 2{,}02$$

c) Representar graficamente os pontos usando, por exemplo, o Excel ou calculadora gráfica e efetuar o ajuste linear.

Do ajuste linear obtém-se o valor do declive $m = 2{,}02$.



Ajuste linear aos pontos da Tabela 1
(reta de equação $y = 2,02x$; assinalam-se os pontos (0,60;1,21) e (1,15;2,32))

EXPERIÊNCIA 5.2

Repetindo a experiência 5.1 com o dobro dos clips (i.e., duplicando a massa do pêndulo), obtém-se um novo conjunto de pontos.

Tabela 3 – Experiência 5.2
(Experiência 5.1 com o dobro da massa)

$\boldsymbol{l}$ (cm)	$10 \times \boldsymbol{T}$ (s)	$\boldsymbol{T}$ (s) com $2\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{T}$ (s) com $\boldsymbol{M}$
30,0	11,1	**1,11**	**1,11**
60,0	15,5	**1,55**	**1,55**
90,0	19,2	**1,92**	**1,92**
120,0	22,1	**2,21**	**2,22**

Comparando os valores de T para cada comprimento l, verifica-se que estes coincidem com os obtidos anteriormente com metade dos clips (última coluna da Tabela 2). Como era esperado, a massa não influencia o período do pêndulo. Uma vez que obtemos os mesmos pontos, o declive da reta será o igual ao obtido na experiência 5.1.

EXPERIÊNCIA 5.3

Uma vez que $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l}$, vemos que no ajuste linear da experiência 5.1

$$m = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \quad \Rightarrow \quad g = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2$$

pelo que podemos determinar o valor de g através do valor obtido para m.

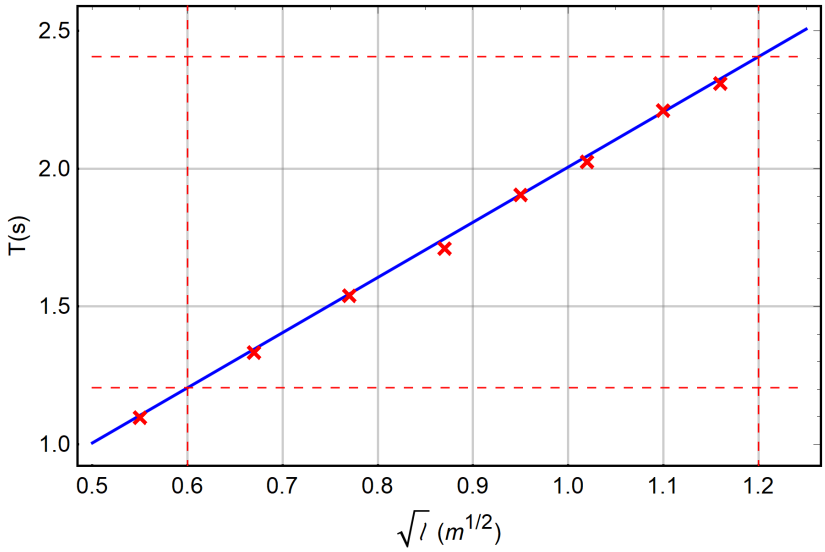
$g = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{2{,}02}\right)^2 = 9{,}68\ \mathrm{m/s^2}$ que é próximo do valor de $g = 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$, **em Lisboa**.

Podemos melhorar este resultado usando mais pontos experimentais. Por exemplo, podemos repetir a experiência 5.1 para 4 pontos intermédios e registar os resultados numa tabela semelhante à Tabela 1.

Tabela 4 – Experiência 5.1 para 4 pontos extra

$\boldsymbol{l}$ (cm)	$\sqrt{\boldsymbol{\ell}}$ ($\mathrm{m^{1/2}}$)	$10 \times \boldsymbol{T}$ (s)	$\boldsymbol{T}$ (s)	$\frac{\boldsymbol{T}}{\sqrt{\boldsymbol{\ell}}}$ ($\mathrm{s/m^{1/2}}$)
45.0	**0.67**	13.5	**1.35**	2.01
75.0	**0.87**	17.2	**1.72**	1.98
105.0	**1.02**	20.4	**2.04**	2,00
135.0	**1.16**	23.2	**2.32**	2,00

Utilizando o conjunto de 8 pontos experimentais, podemos realizar um novo ajuste (usando qualquer um dos 3 métodos discutidos anteriormente) e obter um novo valor para o declive.



Ajuste linear aos pontos das Tabelas 1 e 3
(reta de equação $y = 2,00x + 0,01$; assinalam-se os pontos *(0,60;1,21)* e *(1,20;2,41)*)

Usando os pontos de referência assinalados no gráfico acima, calculamos o declive à mão:

$$m = \frac{2{,}41 - 1{,}21}{1{,}20 - 0{,}60} = 2{,}00$$

Assim, obtemos um novo valor para g:

$g = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{2{,}00}\right)^2 = 9{,}87\ \mathrm{m/s^2}$ que é ainda mais próximo do valor de $g = 9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$, **em Lisboa**.

NOTAS PEDAGÓGICAS

Nas experiências 5.1, 5.2, dependendo da faixa etária dos alunos, pode substituir-se a determinação gráfica do *m* por cálculos independentes e uma média simples.

NOTAS CURRICULARES

Método Científico:

- Pela sua simplicidade de execução a medida do período de um pêndulo poderá ser utilizada para discutir outros conceitos fundamentais em física: reprodutibilidade das experiências para as mesmas condições experimentais; dependência das condições iniciais; erros de medida e repetições.

- Sugere-se que se analisem cada uma destas componentes realizando experiências de controlo com variação de uma única variável.

  Exemplo 1: *efetuar 5 medições do período de um pêndulo sempre com o mesmo comprimento, iniciando a contagem do tempo sempre só após a primeira oscilação completa, largando o pêndulo sempre como mesmo ângulo inicial e medindo o tempo sempre para o mesmo número de oscilações* *(n=10); determinar o valor médio das medições obtidas; discutir a dispersão dos valores obtidos, o desvio em relação à média e a importância para o método experimental da repetição de ensaios.*

Exemplo 2*: repetir o exemplo 1 usando apenas duas oscilações (n=2); comparar com os resultados do exemplo 1.*

Exemplo 3*: repetir o exemplo 1 começando a medir o tempo no momento em que se larga o pêndulo (logo na primeira oscilação); comparar com os resultados do exemplo 1.*

Exemplo 4*: repetir o exemplo 1 largando o pêndulo de várias posições iniciais (vários ângulos iniciais, mas todos pequenos); verificar que os resultados são essencialmente independentes desta condição inicial, o que valida a aproximação das pequenas oscilações na obtenção da solução da equação do movimento do pêndulo.*

- Quando falamos em ângulos pequenos, temos a ideia que de que os ângulos têm de ser mesmo muito pequenos (~5º). No entanto, pode observar-se que o período não varia mesmo que utilizemos um ângulo inicial de 20º. Só a partir de ~30º é que começamos a notar um desvio relativamente ao regime de ângulos pequenos.